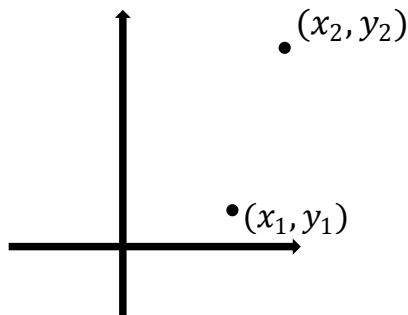


גיאומטריה אנליטית

גיאומטריה אנליטית היא גיאומטריה על מערכת צירים. עבור 2 נקודות במערכת צירים נתונות הנוסחאות הבאות:



1. שיפוע בין 2 נקודות: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2. משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$

3. משוואת ישר העובר דרך (x_1, y_1) ומקביל לציר ה-x: $y = y_1$

4. משוואת ישר העובר דרך (x_1, y_1) ומקביל לציר ה-y: $x = x_1$

5. אמצע קטע: $x_{\text{אמצע}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_{\text{אמצע}} = \frac{y_1 + y_2}{2}$

6. נוסחת מרחק: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

למציאת שיפוע מאונך עושים מינוס אחד חלקי השיפוע

7. שיפועים מאונכים: שיפוע מאונך הופכי גנדי $m_1 \cdot m_2 = -1$

8. ישרים מקבילים: בעלי שיפועים שווים $m_1 = m_2$

9. משוואת מעגל: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

למציאת נקודות חיתוך עם הצירים:

- לחיתוך עם ציר ה-x משווים את ה-y לאפס.
- לחיתוך עם ציר ה-y משווים את ה-x לאפס.

למצוא נקודת חיתוך בין 2 ישרים:

- א. משווים בין 2 הישרים ומגלים כמה x שווה.
- ב. מציבים את ה- x שגילינו באחד הישרים ומגלים את ה- y .

למצוא נקודת חיתוך בין ישר ומעגל:

- א. מציבים את הישר במקום ה- y של המעגל.
- ב. פותחים סוגריים ומפשטים עד שמקבלים משוואה ריבועית.
- ג. עושים נוסחת שורשים ומגלים את שיעור ה- x .
- ד. את שיעור ה- x מציבים במשוואת ישר כדי לגלות את שיעור ה- y .

דוגמאות במציאת נקודות חיתוך בין ישרים ועם הצירים:

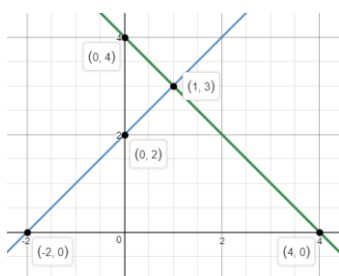
נתונים שני הישרים: $y = x + 2$ $y = -x + 4$

- א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של כל אחד מהישרים.
- ב. מצא את נקודת החיתוך של הישרים.

פתרון א': נקודת חיתוך עם ציר ה- x : מציבים $y = 0$.

נקודת חיתוך עם ציר ה- y : מציבים $x = 0$.

$y = x + 2$		$y = -x + 4$	
חיתוך עם ציר ה- x	חיתוך עם ציר ה- y	חיתוך עם ציר ה- x	חיתוך עם ציר ה- y
$y = 0 + 2$	$0 = x + 2$	$y = -0 + 4$	$0 = -x + 4$
$y = 2$	$x = -2$	$y = 4$	$x = 4$
$(0, 2)$	$(-2, 0)$	$(0, 4)$	$(4, 0)$



פתרון ב': משווים בין הישרים.

$$\begin{aligned}
 x + 2 &= -x + 4 \\
 2x &= 2 \\
 x &= 1 \\
 y &= 1 + 2 \\
 &(1, 3)
 \end{aligned}$$

משווים בין הישרים
מעבירים אגפים
מבודדים את ה- x
מציבים באחד מהישרים
נקודת החיתוך היא:

דוגמאות במציאת נקודות חיתוך בין ישר ומעגל ומעגל עם הצירים :

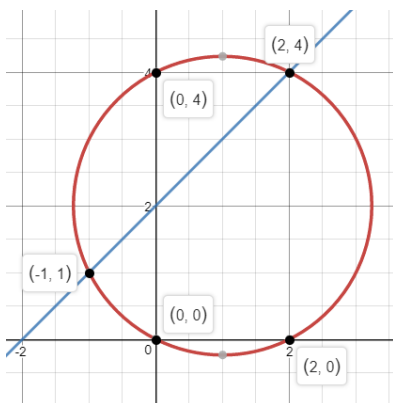
נתון הישר $y = x + 2$ ונתונה משוואת המעגל $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

- א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של המעגל.
- ב. מצא את נקודת החיתוך של הישר עם המעגל.

פתרון א' :

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ <p>חיתוך עם ציר ה-y : $x = 0$</p> $(0 - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ $1 + y^2 - 4y + 4 = 5$ $y^2 - 4y = 0$ $y(y - 4) = 0$ $y_1 = 0 \quad y_2 = 4$ $(0,0) \quad (0,4)$	<p>חיתוך עם ציר ה-x : $y = 0$</p> $(x - 1)^2 + (0 - 2)^2 = 5$ $x^2 - 2x + 1 + 4 = 5$ $x^2 - 2x = 0$ $x(x - 2) = 0$ $x_1 = 0 \quad x_2 = 2$ $(0,0) \quad (2,0)$
--	--

פתרון ב' : מציבים את משוואת הישר במשוואת המעגל



$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

$$(x - 1)^2 + (x + 2 - 2)^2 = 5$$

$$(x - 1)^2 + (x)^2 = 5$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 = 5$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$$

$$y_1 = -1 + 2 \quad y_2 = 2 + 2$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = 4$$

$$(-1,1) \quad (2,4)$$

משוואת המעגל
נציב $y = x + 2$
מכנסים איברים
פותחים סוגריים
מעבירים אגפים
נוסחת שורשים
מציבים את שיעורי
ה- x בישר הנתון
פתרון :

דוגמה בשימוש בנוסחאות:

נתונות הנקודות $A(1,4)$ $B(5,6)$

- א. מצאי את השיפוע בין 2 הנקודות.
- ב. מצאי את משוואת הישר העובר בין 2 הנקודות.
- ג. מצאי את נקודה C הנמצאת בדיוק בין 2 הנקודות (אמצע הקטע AB)
- ד. מצאי את אורך הקטע AC
- ה. מצאי את שיפוע הישר המאונך לישר AB .
- ו. מצאי את משוואת הישר המאונך לישר AB ועובר בנקודה C .
- ז. מצאי את משוואת המעגל שהקטע AB הוא הקוטר שלו.

פתרון:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 4}{5 - 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m_{AB} \cdot (x - x_A)$$

$$y - 4 = 0.5 \cdot (x - 1)$$

$$y - 4 = 0.5x - 0.5$$

$$y = 0.5x + 3.5$$

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

$C(3,5)$

$$d_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - 1)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{5}$$

$$m_{AB} = \frac{1}{2} \quad m_{\text{ישר מאונך}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$y - y_C = m_{\text{ישר מאונך}} \cdot (x - x_C)$$

$$y - 5 = -2 \cdot (x - 3)$$

$$y - 5 = -2x + 6$$

$$y = -2x + 11$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 5$$

א. מציבים בנוסחת שיפוע

ב. בשביל משוואת הישר אנחנו צריכים שיפוע ונקודה. נשתמש בשיפוע שמצאנו ובנקודה $A(1,4)$ ונציב במשוואת הישר.

ג. הנקודה C היא אמצע הקטע AB לכן נשתמש בנוסחת אמצע הקטע.

קיבלנו את הנקודה C :

ד. מציבים בנוסחת אורך קטע את הנקודות $A(1,4)$ ו- $C(3,5)$.

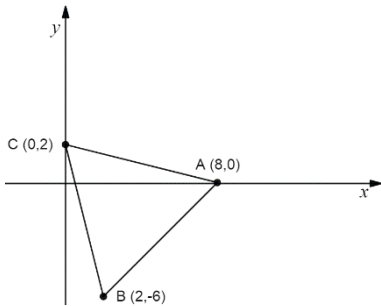
ה. מוצאים שיפוע מאונך לפי שיפוע הופכי נגדי $(-\frac{1}{\text{השיפוע}})$

ו. בשביל משוואת הישר אנחנו צריכים שיפוע ונקודה. נשתמש בשיפוע שמצאנו בסעיף קודם ובנקודה $C(3,5)$ שעל הישר.

ז. מציבים במשוואת מעגל את נקודת מרכז המעגל ואת הרדיוס המעגל. כיוון שהקטע AB הוא קוטר נקודת האמצע קטע שלו $C(3, 5)$ היא מרכז המעגל. הרדיוס הוא $R = AC = \sqrt{5}$.

דוגמאות להוכחות:

1. נתונות הנקודות $A(8,0)$, $B(2,-6)$ ו- $C(0,2)$.
הוכח שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים.



פתרון:

בכדי להוכיח שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים עלינו להראות ש-2 מצלעות המשולש שוות.

$$BC = \sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_B - x_C)^2}$$

$$= \sqrt{(-6 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{64 + 4}$$

$$BC = \sqrt{68}$$

נחשב את המרחק BC לפי נוסחת המרחק והנקודות $C(0,2)$ ו- $B(2,-6)$:

$$AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

$$= \sqrt{(-6 - 0)^2 + (2 - 8)^2} = \sqrt{36 + 36}$$

$$AB = \sqrt{72}$$

נחשב את המרחק AB לפי נוסחת המרחק והנקודות $A(8,0)$ ו- $B(2,-6)$:

$$AC = \sqrt{(y_C - y_A)^2 + (x_C - x_A)^2}$$

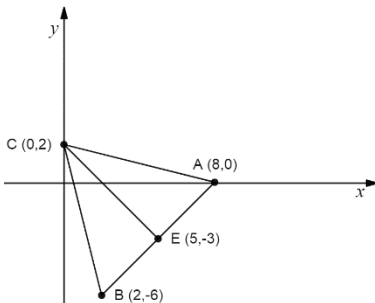
$$= \sqrt{(2 - 0)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{4 + 64}$$

$$AC = \sqrt{68}$$

נחשב את המרחק AC לפי נוסחת המרחק והנקודות $A(8,0)$ ו- $C(0,2)$:

קיבלנו ש- $AC = BC$ ולכן ΔABC הוא שווה שוקיים.

2. נתונות הנקודות $A(8,0)$, $B(2,-6)$, $C(0,2)$ ו- $E(5,-3)$.
הוכח שהישר CE אנך לישר AB .



בכדי להוכיח ש- $CE \perp AB$ עלינו להראות שמכפלת השיפועים של הישרים שווה ל-1-.

$$m_{CE} = \frac{y_C - y_E}{x_C - x_E} = \frac{2 - (-3)}{0 - 5} = -1$$

נחשב את השיפוע של הישר CE לפי הנקודות $C(0,2)$ ו- $E(5,-3)$:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 - (-6)}{8 - 2} = 1$$

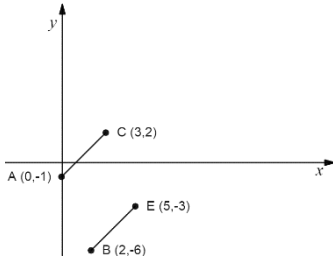
נחשב את השיפוע של הישר AB לפי הנקודות $A(8,0)$ ו- $B(2,-6)$:

$$m_{AB} \cdot m_{CE} = 1 \cdot (-1) = -1$$

ניתן לראות כי השיפועים של הישרים נגדיים בסימנים והופכיים:

קיבלנו שמכפלת שיפועי הישרים היא -1 ולכן מדוברים בישרים אנכיים.

3. נתונות הנקודות $A(0, -1)$, $B(2, -6)$, $C(3, 2)$ ו- $E(5, -3)$.
הוכח שהישרים EB ו- AC מקבילים.



בכדי להוכיח ש- $CE \parallel AB$ עלינו להראות שלישורים יש שיפוע זהה.

$$m_{EB} = \frac{y_B - y_E}{x_B - x_E} = \frac{-6 - (-3)}{2 - 5} = 1$$

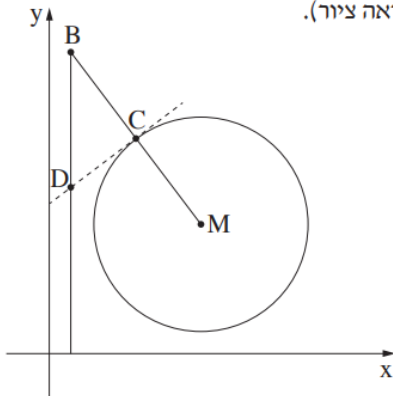
נחשב את השיפוע של הישר EB לפי הנקודות $B(2, -6)$ ו- $E(5, -3)$:

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-1 - 2}{0 - 3} = 1$$

נחשב את השיפוע של הישר AC לפי הנקודות $A(0, -1)$ ו- $C(3, 2)$:

קיבלנו ששיפועי הישרים שווים ל-1 ולכן מדוברים בישרים מקבילים.

בגרות קיץ 2019 מועד א' שאלה 2:



נתון מעגל שמרכזו $M(7, 6)$. הישר MB חותך את המעגל בנקודה C (ראה ציור).

נתון: $B(1, 14)$,

$$MC = CB$$

א. מצא את משוואת המעגל.

העבירו משיק למעגל בנקודה C .

ב. מצא את משוואת המשיק.

מן הנקודה B הורידו אנך לציר ה- x . המשיק והאנך נחתכים בנקודה D .

ג. חשב את שטח המשולש BCD .

הנקודה E נמצאת על האנך שהורידו מנקודה B לציר ה- x .

נתון: $ME \parallel CD$.

ד. מצא את שיעורי הנקודה E .

ה. הראה כי הנקודה D היא מרכז המעגל החוסם את המשולש BME .

סעיף א':

נמצא את נקודה C לפי אמצע קטע:

$$x_C = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$y_C = \frac{6+14}{2} = 10$$

$$MC = \sqrt{(7-4)^2 + (6-10)^2} = 5$$

$$(x-7)^2 + (y-6)^2 = 25$$

$$C(4, 10)$$

נמצא את אורך MC :

משוואת המעגל:

סעיף ב':

נמצא שיפוע של MC :

$$m_{MC} = \frac{6-10}{7-4} = -\frac{4}{3}$$

$$m_{DC} = \frac{3}{4}$$

$$y-10 = \frac{3}{4}(x-4)$$

$$y = \frac{3}{4}x + 7$$

מכיוון שמשיק מאונך לרדיוס בנקודת השקה

אז השיפוע של DC הופכי נגדי ל MC :

נמצא משוואת ישר באמצעות נקודה C :

סעיף ג':

נמצא את נקודה D :

$$y(1) = \frac{3}{4} \cdot 1 + 7 = 7.75$$

$$DC = \sqrt{(4-1)^2 + (10-7.75)^2} = 3.75$$

$$MC = CB = 5$$

$$S_{\Delta BCD} = 0.5 \cdot 5 \cdot 3.75 = 9.375 \text{ יח}''$$

נמצא את אורך הצלע DC :

לפי הנתון:

נחשב את שטח המשולש:

סעיף ד':

ישרים מקבילים לכן השיפועים שווים:

נמצא משוואת ישר באמצעות נקודה M :

$$m_{DC} = m_{ME} = 0.75$$

$$y - 6 = 0.75(x - 7)$$

$$y = 0.75x + 0.75$$

$$y(1) = 0.75 \cdot 1 + 0.75 = 1.5 \rightarrow E(1, 1.5)$$

נמצא את נקודה E :

סעיף ה':

תחילה נבין ש- BE הוא הקוטר של המעגל כיוון שזווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר. כעת רק נשאר להוכיח שנקודה D היא אמצע BE .

$$D(1, 7.75) \quad B(1, 14) \quad E(1, 1.5)$$

$$y_{\text{אמצע}} = \frac{14 + 1.5}{2} = 7.75$$

נשתמש בנוסחת אמצע קטע לערך ה- y :

ניתן לראות שקיבלנו את ה- y של נקודה D לכן זה יהיה מרכז המעגל.