סדרות

סדרות חשבוניות

סדרה חשבונית מורכבת מרצף מספרים הגדלים / קטנים בהפרש קבוע.

בכל סדרה יש מספר משתנים חשובים :

1. איבר ראשון - a_1
2. הפרש - d
3. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה - n
4. איבר כללי (איבר במקום מסויים) - a_n
5. סכום - S_n

<u>נוסחאות :</u>

<u>איבר כללי</u> : $a_n = a_1 + d(n-1)$

<u>סכום</u> : $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$

<u>דוגמה</u> : עבור רצף המספרים 2,7,12,17,22 מצא את האיבר במקום ה15.

נסמן :

1. איבר ראשון: $a_1 = 2$
2. הפרש : $d = 5$
3. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה : $n = 15$
4. איבר כללי (איבר במקום מסויים) : $a_n = ?$

נציב בנוסחת איבר כללי : $a_n = 2 + 5(15-1)$

ונקבל : $a_n = 72$

<u>דוגמה</u> : עבור רצף המספרים 100,92,84 מצא את מיקומו של האיבר שערכו 4.

נסמן :

1. איבר ראשון: $a_1 = 100$
2. הפרש : $d = -8$
3. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה : $n = ?$
4. איבר כללי (איבר במקום מסויים) : $a_n = 4$

נציב בנוסחת איבר כללי : $4 = 100 - 8(n-1)$

ונקבל $n = 13$ (כלומר מיקום האיבר בסדרה הוא 13).

דוגמה :

עבור סדרה חשבונית נתון : $a_5 = 34$ וגם $a_8 = 52$

מצא את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

שלב ראשון : נבטא את a_5 ואת a_8 באמצעות a_1 ובאמצעות d ע"י הצבה בנוסחת איבר הכללי.

א. $a_5 = a_1 + 4\mathrm{d}$
ב. $a_8 = a_1 + 7\mathrm{d}$

שלב שני : נציב במערכת משוואות.

א. $a_1 + 4\mathrm{d} = 34$
ב. $a_1 + 7\mathrm{d} = 52$

שלב שלישי : נחסר את המשוואות אחת מהשניה ונציב את d אחרי שנגלה אותו באחת המשוואות :

- $3\mathrm{d} = 18$
- $\boxed{\mathrm{d} = 6}$
- $\boxed{a_1 = 10}$

דוגמה : איברים חיוביים ושליליים :

עבור הסדרה : $-40, -43, -46, -49$ מצא כמה איברים שליליים יש בסדרה.

- **כאשר שואלים אותנו כמה איברים חיוביים / שליליים יש בסדרה נסמן באיבר כללי $a_n = 0$ ונחפש כמה איברים יש בסדרה.** אם מספר האיברים יוצא מספר לא שלם נעגל כלפי מטה.

נסמן :

1. איבר ראשון : $a_1 = -49$
2. הפרש : $d = 3$
3. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה : $n = ?$
4. איבר כללי (איבר במקום מסויים) : $a_n = 0$

נציב בנוסחת איבר כללי : $0 = -49 + 3(n-1)$

נחשב ונמצא ש $n = 17\frac{1}{3}$

ולכן יש 17 איברים שליליים בסדרה.

הגדרת סדרה חשבונית:

בסדרה חשבונית כל האיברים גדלים בהפרש קבוע ולכן:

1. ניתן להגיד שההפרש בין כל 2 איברים בסדרה קבוע (למשל $a_4 - a_3 = a_3 - a_2$)
2. **להוכחת סדרה חשבונית:** $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n} =$ (ביטוי שאינו תלוי ב$\boldsymbol{n}$)

דוגמה:

נתון שרצף הביטויים הבאים מהווה סדרה חשבונית: $-20, 4x, x^2$

מצא את שתי האפשרויות לאיברי הסדרה.

1. מכיוון שהסדרה היא סדרה חשבונית ניתן להגיד: $4x - x^2 = -20 - 4x$
2. נעביר אגפים ונקבל $x^2 - 8x - 20 = 0$
3. קיבלנו: $x_1 = -2, x_2 = 10$
4. הפיתרון: אופציה א׳: $-20,40,100$ אופציה ב׳: $-20,-8,4$

דוגמה להוכחת סדרה חשבונית:

נתון שהסדרה $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ היא סדרה חשבונית הוכח שהסדרה

$a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, \ldots, a_n + d - a_1$ היא סדרה חשבונית וקבע את ההפרש שלה באמצעות d.

1. להוכחת סדרה חשבונית יש לבדוק האם בסדרה החדשה $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n} =$ (ביטוי שאינו תלוי ב$\boldsymbol{n}$)
   - $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n} = (n+1) \cdot \mathrm{d} - n \cdot \mathrm{d} = \mathrm{d}$
2. מכיוון שהחיסור בין שני האיברים הוא ביטוי שאינו תלוי בn הסדרה החדשה היא סדרה חשבונית שהפרשה d.

הערות:

1. כל איבר בסדרה חשבונית הוא הממוצע החשבוני של שני האיברים הסמוכים לו.
   לדוגמה: a_1, a_2, a_3 הם שלושה מספר עוקבים בסדרה חשבונית ולכן מתקיים:
   $$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$
2. כאשר שואלים אותנו כמה איברים חיוביים / שליליים יש בסדרה נסמן באיבר כללי $a_n = 0$ ונחפש כמה איברים יש בסדרה. אם מספר האיברים יוצא מספר לא שלם נעגל כלפי מטה.

סכום סדרה חשבונית:

סכום סדרה חשבונית מיוצג ע"י הנוסחאות הבאות:

1. $\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]}$
2. $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$
3. $S_n = \frac{n}{2}[2a_n - d(n-1)]$

ברוב התרגילים נשתמש בנוסחה מס' 1.

דוגמה:

נתונה הסדרה החשבונית 5,9,13,17,21 מצאי את סכום עשרת האיברים הראשונים של הסדרה.

נסמן:

1. איבר ראשון: $a_1 = 5$
2. הפרש: $d = 4$
3. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה: $n = 10$
4. סכום: $S_n = ?$

נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $S_{10} = \frac{10}{2}[2 \cdot 5 + 4(10-1)]$

ונקבל: $S_{10} = 230$

דוגמה:

כמה איברים מהסדרה 50,45,40,35 יש לחבר כדי שסכומם יהיה 0?

נסמן:

1. איבר ראשון: $a_1 = 50$
2. הפרש: $d = -5$
3. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה: $n = ?$
4. סכום: $S_n = 0$

נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $0 = \frac{n}{2}[2 \cdot 50 - 5(n-1)]$

נקבל משוואה ריבועית, נפסול את הפיתרון של $n = 0$ ונקבל ש $n = 21$

<u>הוכחת סדרה חשבונית</u>:

כאשר יבקשו מאתנו להוכיח סדרה חשבונית בעזרת נוסחת סכום נזכור שהתנאי להוכחה הוא:

$$\boldsymbol{a_{n+1} - a_n} = (\text{ביטוי שאינו תלוי ב } \boldsymbol{n})$$

אם נתונה לנו נוסחת סכום נוכל לגלות את a_n ו a_{n+1} ולפתור את התרגיל באופן הבא:

- שלב ראשון: $\boldsymbol{s_n - s_{n-1} = a_n}$
- שלב שני: מציבים $n+1$ בנוסחה של $\boldsymbol{a_n}$
- שלב שלישי: הפרש הסדרה $\boldsymbol{= a_{n+1} - a_n}$

<u>דוגמה</u>: הוכחת סדרה חשבונית:

סכום n האיברים הראשונים בסדרה כלשהי הוא $S_n = 2n^2 - 5n$ הוכיחי שהסדרה היא סדרה חשבונית ומצאי את האיבר הכללי וההפרש של הסדרה.

- שלב ראשון: $s_n - s_{n-1} = 2n^2 - 5n - [2(n-1)^2 - 5(n-1)]$
  ולכן: $a_n = 4n - 7$

- שלב שני: $a_{n+1} = 4(n+1) - 3$
  ולכן: $a_{n+1} = 4n - 3$

- שלב שלישי: $a_{n+1} - a_n = 4$

בצורה זו הוכחנו שהסדרה היא סדרה חשבונית כאשר האיבר הכללי שלה הוא $a_n = 4n - 7$ והפרשה 4.

- **<u>טיפ</u>**: במידה והאלגברה בתרגילים קשה ניתן להציב בנוסחת סכום $n = 1,2,3$
  בצורה הזו אפשר לגלות את האיבר הראשון השני והשלישי של הסדרה וכך יודעים לאיזו תשובה צריך להגיע.

<u>סכום איברים אחרונים</u>: שיבקשו מאיתנו את סכום האיברים האחרונים נפתור את התרגיל בצורה הבאה:

- נגלה את סכום כל האיברים
- נגלה את סכום האיברים הראשונים עד האיבר הספציפי
- נחסר את סכום האיברים הראשונים מסכום כל האיברים.

<u>דוגמה</u>: סכום איברים אחרונים:

בסדרה 3,7,11,15 קיימים 20 איברים. מה סכום חמשת האיברים האחרונים של הסדרה?

- שלב ראשון: $S_{20} = \frac{20}{2}[2 \cdot 3 + 4(20-1)] = 820$
- שלב שני: $S_{15} = \frac{15}{2}[2 \cdot 3 + 4(15-1)] = 465$
- שלב שלישי $S_{\text{5 אחרונים}} = 820 - 465 = 355$

<u>סכום איברים זוגיים ואי זוגיים</u>:

בפתרון בעיות מסוג זה נפצל את הסדרה הקיימת ל2 סדרות חדשות: סדרת איברים זוגיים וסדרת איברים אי זוגיים. הפיתרון יראה כך:

- עבור מס' זוגי של איברים

	סדרה מקורית	סדרת אי זוגיים	סדרת זוגיים
איבר ראשון	a_1	a_1	$a_1 + d$
הפרש	d	$2d$	$2d$
מספר איברים	$2n$	n	n

- עבור מס' אי זוגי של איברים מס' האיברים האי זוגיים גדול באחד

	סדרה מקורית	סדרת אי זוגיים	סדרת זוגיים
איבר ראשון	a_1	a_1	$a_1 + d$
הפרש	d	$2d$	$2d$
מספר איברים	$2n + 1$	$n + 1$	n

<u>דוגמה</u>: סכום איברים זוגיים ואי זוגיים.

בסדרה חשבונית 30 איברים, האיבר הראשון הוא 5 והפרש הסדרה הוא 7, חשבי את סכום האיברים הזוגיים והאי זוגיים.

נסמן:

	סדרה מקורית	סדרת אי זוגיים	סדרת זוגיים
איבר ראשון	5	5	12
הפרש	7	14	14
מספר איברים	30	15	15

עבור אי זוגיים נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $S_{\text{אי זוגיים}} = \frac{15}{2}[2 \cdot 5 + 14(15 - 1)]$

ולכן: $S_{\text{אי זוגיים}} = 1545$

עבור זוגיים נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $S_{\text{זוגיים}} = \frac{15}{2}[2 \cdot 12 + 14(15 - 1)]$

ולכן: $S_{\text{זוגיים}} = 1650$

סדרות הנדסיות

סדרה חשבונית מורכבת מרצף מספרים הגדלים / קטנים במנה קבועה.

בכל סדרה יש מספר משתנים חשובים :

6. איבר ראשון - a_1
7. מנה - q
8. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה - n
9. איבר כללי (איבר במקום מסוים) - a_n
10. סכום - S_n

<u>נוסחאות :</u>

<u>**איבר כללי**</u> : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

<u>**סכום**</u> : $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

<u>סדרה הנדסית עולה</u> : סדרה בה המנה גדולה מ1 $q > 1$ והאיבר הראשון חיובי $a_1 > 0$

או מנה בין 0 ל-1 : $0 < q < 1$ והאיבר הראשון שלילי $a_1 < 0$

דוגמה : $1,3,9,27,81$

<u>סדרה הנדסית יורדת</u> : סדרה בה המנה קטנה מ1 וגדולה מ-0 $0 < q < 1$ ואיבר ראשון חיובי $a_1 > 0$

או מנה גדולה מ1 $q > 1$ ואיבר ראשון שלילי $a_1 < 0$.

דוגמה: $200,100,50,25$

<u>סדרה הנדסית מתחלפת</u> : סדרה בה המנה קטנה מ0. $q < 0$

דוגמה : $1,-3,9,-27,81$

דוגמה : $200,-100,50,-25$

<u>דוגמה</u> : עבור רצף המספרים 2,8,32,124 מצאי את האיבר במקום ה8.

נסמן :

5. איבר ראשון $a_1 = 2$
6. מנה $q = 4$
7. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה $n = 8$
8. איבר כללי (איבר במקום מסויים) $a_n = ?$

נציב בנוסחת איבר כללי : $a_8 = 2 \cdot 4^{8-1}$

ונקבל : $a_8 = 32768$

דוגמה : עבור רצף המספרים 3645,1215,405 מצאי את מיקומו של האיבר שערכו 5.

נסמן :

5. איבר ראשון $a_1 = 3645$
6. מנה $q = \frac{1}{3}$
7. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה $n = ?$
8. איבר כללי (איבר במקום מסויים) $a_n = 5$

נציב בנוסחת איבר כללי : $5 = 3645 \cdot (\frac{1}{3})^{n-1}$

ונקבל $n = 7$ (כלומר מיקום האיבר בסדרה הוא 7).

פתרון אלגברי:

- $5 = 3645 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
- $\frac{5}{3645} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
- $\frac{1}{729} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
- $n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{1}{729}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$
- $n - 1 = 6$
- $n = 7$

דוגמה :

עבור סדרה הנדסית נתון : $a_4 = 384$ וגם $a_6 = 6144$

מצאי את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

שלב ראשון : נבטא את a_4 ואת a_6 באמצעות a_1 ובאמצעות q ע״י הצבה בנוסחת איבר הכללי.

ג. $a_4 = a_1 \cdot q^3$
ד. $a_6 = a_1 \cdot q^5$

שלב שני : נציב במערכת משוואות.

ג. $a_1 \cdot q^3 = 384$
ד. $a_1 \cdot q^5 = 6144$

שלב שלישי : נחלק את המשוואות אחת בשנייה ונציב את q אחרי שנגלה אותו באחת המשוואות :

- $q^2 = 16$
- $q = 4$ או $q = -4$
- $a_1 = 6$ או $a_1 = -6$

פתרון אלגברי:

- $\frac{a_1 \cdot q^5}{a_1 \cdot q^3} = \frac{6144}{384}$
- $q^2 = 16$
- $\sqrt{q^2} = \sqrt{16}$
- $q = 4$ או $q = -4$

הגדרת סדרה הנדסית:

בסדרה הנדסית כל האיברים גדלים במנה קבועה ולכן :

3. ניתן להגיד שהמנה בין כל 2 איברים בסדרה קבועה (למשל $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3}$)
4. **להוכחת סדרה הנדסית:** $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$ (ביטוי שאינו תלוי בn)

דוגמה:

נתון שרצף הביטויים הבאים מהווה סדרה הנדסית יורדת: $25, x-1\ , x-5$

מצאי את שתי האפשרויות לאיברי הסדרה.

5. מכיוון שהסדרה היא סדרה הנדסית ניתן להגיד: $\frac{25}{x-1}=\frac{x-1}{x-5}$
6. כפל בהצלבה ונקבל $x^2-2x+1=25x-125$
7. קיבלנו: $x_1=21\ , x_2=6$
8. פתרון: אופציה א׳: 25,20,16 אופציה ב׳: 25,5,1

דוגמה להוכחת סדרה הנדסית:

נתון שהסדרה $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ היא סדרה הנדסית הוכיחי שהסדרה

$(a_1)^3, (a_2)^3, (a_3)^3, (a_4)^3 \ldots (a_n)^3$ היא סדרה הנדסית וקבעי את המנה שלה באמצעות q.

1. שיטה נוחה לפתרון בעיות בסדרות היא סימון האיברים באמצעות טבלה:

איבר	סדרה מקורית	סדרה חדשה
ראשון	a_1	$(a_1)^3$
שני	$a_1 \cdot q$	$(a_1)^3 \cdot q^3$
שלישי	$a_1 \cdot q^2$	$(a_1)^3 \cdot q^6$
רביעי	$a_1 \cdot q^3$	$(a_1)^3 \cdot q^9$
איבר כללי a_n	$a_1 \cdot q^{n-1}$	$(a_1)^3 \cdot q^{3n-3}$
איבר אחד אחרי האיבר הכללי a_{n+1}	$a_1 \cdot q^n$	$(a_1)^3 \cdot q^{3n}$

2. להוכחת סדרה חשבונית יש לבדוק האם בסדרה החדשה (ביטוי שאינו תלוי ב$\boldsymbol{n}$) = $\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}$
   - $\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{(a_1)^3 \cdot q^{3n}}{(a_1)^3 \cdot q^{3n-3}}=q^3$
3. מכיוון שהמנה בין שני האיברים הוא ביטוי שאינו תלוי בn הסדרה החדשה היא סדרה הנדסית שמנתה q^3.

הערות:

1. כל איבר בסדרה הנדסית הוא הממוצע ההנדסי של שני האיברים הסמוכים לו.
   לדוגמה: a_1, a_2, a_3 הם שלושה מספר עוקבים בסדרה הנדסית ולכן מתקיים:

$$a_2^2=a_1 \cdot a_3$$

סכום סדרה הנדסית:

סכום סדרה הנדסית מיוצג ע"י הנוסחה הבאה:

- $\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}}$

דוגמה:

נתונה הסדרה החשבונית 1,5,25,125 מצאי את סכום שבעת האיברים הראשונים של הסדרה.

נסמן:

5. איבר ראשון: $a_1 = 1$
6. מנה: $q = 5$
7. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה: $n = 7$
8. סכום: $S_n = ?$

נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $S_n = \frac{1(5^7-1)}{5-1}$

ונקבל: $S_7 = 19531$

דוגמה:

כמה איברים מהסדרה 6,18,54,162 יש לחבר כדי שסכומם יהיה 6558?

נסמן:

5. איבר ראשון: $a_1 = 6$
6. מנה: $q = 3$
7. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה: $n = ?$
8. סכום: $S_n = 6558$

נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $6558 = \frac{6(3^n-1)}{3-1}$

נפתור את המשוואה ונקבל ש $n = 7$

פתרון אלגברי:

- $6558 = \frac{6(3^n-1)}{3-1}$
- $2187 = 3^n$
- $n = \frac{\ln(2187)}{\ln(3)}$
- $n = 7$

<u>הוכחת סדרה הנדסית</u>:

כאשר יבקשו מאיתנו להוכיח סדרה הנדסית בעזרת נוסחת סכום נזכור שהתנאי להוכחה הוא:

$$\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = (\text{ביטוי שאינו תלוי ב}\boldsymbol{n})$$

אם נתונה לנו נוסחת סכום נוכל לגלות את a_n ו a_{n+1} ולפתור את התרגיל באופן הבא:

- שלב ראשון: $\boldsymbol{s_n - s_{n-1} = a_n}$
- שלב שני: מציבים $n+1$ בנוסחה של $\boldsymbol{a_n}$
- שלב שלישי: מנת הסדרה $= \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}$

<u>דוגמה</u>**:** הוכחת סדרה הנדסית:

סכום n האיברים הראשונים בסדרה כלשהי הוא $S_n = 3^{n+1} - 3$ הוכיחי שהסדרה היא סדרה הנדסית ומצאי את האיבר הכללי והמנה של הסדרה.

- שלב שני: $s_n - s_{n-1} = 3^{n+1} - 3 - [3^n - 3]$
  ולכן: $a_n = 2 \cdot 3^n$

- שלב שני: $a_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1}$
  ולכן: $a_{n+1} = 6 \cdot 3^n$

- שלב שלישי: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$

בצורה זו הוכחנו שהסדרה היא סדרה הנדסית כאשר האיבר הכללי שלה הוא $a_n = 2 \cdot 3^n$ ומנתה 3.

- <u>**טיפ**</u>: במידה והאלגברה בתרגילים קשה ניתן להציב בנוסחת סכום $n = 1,2,3$
  בצורה הזו אפשר לגלות את האיבר הראשון השני והשלישי של הסדרה וכך יודעים לאיזו תשובה צריך להגיע.

<u>סכום איברים אחרונים</u>: שיבקשו מאתנו את סכום האיברים האחרונים נפתור את התרגיל בצורה הבאה:

- נגלה את סכום כל האיברים
- נגלה את סכום האיברים הראשונים עד האיבר הספציפי
- נחסר את סכום האיברים הראשונים מסכום כל האיברים.

<u>דוגמה</u>: סכום איברים אחרונים:

בסדרה 2,14,42,126 קיימים 10 איברים. מה סכום ארבעת האיברים האחרונים של הסדרה?

- שלב ראשון: $S_{10} = \frac{2(7^{10}-1)}{7-1} = 94158416$
- שלב שני: $S_6 = \frac{2(7^6-1)}{6-1} = 39216$
- שלב שלישי: $S_{\text{4 אחרונים}} = 94158416 - 39216 = 94119200$

<u>סכום איברים זוגיים ואי זוגיים</u>:

בפתרון בעיות מסוג זה נפצל את הסדרה הקיימת ל2 סדרות חדשות: סדרת איברים זוגיים וסדרת איברים אי זוגיים. הפתרון יראה כך:

- עבור מס' זוגי של איברים

	סדרה מקורית	סדרת אי זוגיים	סדרת זוגיים
איבר ראשון	a_1	a_1	$a_1 \cdot q$
מנה	q	q^2	q^2
מספר איברים	$2n$	n	n

- עבור מס' אי זוגי של איברים מס' האיברים האי זוגיים גדול באחד

	סדרה מקורית	סדרת אי זוגיים	סדרת זוגיים
איבר ראשון	a_1	a_1	$a_1 \cdot q$
מנה	q	q^2	q^2
מספר איברים	$2n$	$n+1$	n

<u>דוגמה</u>: סכום איברים זוגיים ואי זוגיים.

בסדרה הנדסית 11 איברים, האיבר הראשון הוא 5 ומנת הסדרה היא 3, חשבי את סכום האיברים הזוגיים והאי זוגיים.

נסמן:

	סדרה מקורית	סדרת אי זוגיים	סדרת זוגיים
איבר ראשון	5	5	15
מנה	3	9	9
מספר איברים	11	6	5

עבור אי זוגיים נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $S_{\text{אי זוגיים}} = \frac{5(9^6-1)}{9-1}$

ולכן: $S_{\text{אי זוגיים}} = 332150$

עבור זוגיים נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $S_{\text{זוגיים}} = \frac{15(9^5-1)}{9-1}$

ולכן: $S_{\text{זוגיים}} = 110715$

סכום סדרה הנדסית אינסופית:

סדרה הנדסית אינסופית היא סדרה הנדסית שלרוב יורדת ($-1 < q < 1$) בעלת אינסוף איברים.

נוסחה: $S_{\text{אינסופית}} = \frac{a_1}{1-q}$

דוגמה: נתון טור הנדסי אינסופי שהאיבר הראשון בו הוא 6 ומנתו 0.5, מהו סכום הטור?

נסמן:

1. איבר ראשון: $a_1 = 6$
2. מנה: $q = 0.5$
3. סכום: $S_{\text{אינסופית}} = ?$

נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $S_{\text{אינסופית}} = \frac{6}{1-0.5}$

ונקבל: $S_{\text{אינסופית}} = 12$

דוגמה: נתון טור הנדסי אינסופי שהאיבר הראשון בו הוא 80 וסכומו 200, מהי מנת הטור?

נסמן:

1. איבר ראשון: $a_1 = 80$
2. מנה: $q = ?$
3. סכום: $S_{\text{אינסופית}} = 200$

נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $200 = \frac{80}{1-q}$

ונקבל: $q = 0.6$

בגרות קיץ 2022 מועד א' שאלה 2:

סדרה I היא סדרה הנדסית אין־סופית שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$ ומנתה היא $9 \cdot r^2$.

נתון: $0 < r < \frac{1}{3}$.

בין כל שני איברים בסדרה I הִכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, \dots$ ומנתה היא q.

א. **(1)** הַביעו את q באמצעות r.

(2) הַסבירו מדוע שתי הסדרות I ו־ II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום סדרה I.

ב. חשבו את q.

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 12.

ג. מִצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב־5 $(b_5, b_{10}, b_{15}, \dots)$.

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

<u>סעיף א'1:</u>

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \dots\dots\dots$

$\times 9r^2 \quad \times 9r^2$

$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \dots\dots\dots$

$\times 9r^2 \quad \times 9r^2$

$q^2 = 9r^2$

$q = \pm 3r$

מכיוון שנתון שהסדרה יורדת ולא מדלגת:

$q = 3r$

<u>סעיף א'2:</u>

מכיוון שנתון ש- $0 < r < \frac{1}{3}$ אז $0 < q < 1$ לכן הסדרות מתכנסות.

<u>סעיף ב':</u>

נזכיר שסדרה 2 התקבלה מהכנסה של איבר בין כל שני איברים בסדרה 1, לכן האיבר הראשון בשתי הסדרות נותר זהה.

סכום סדרה 1:
$$S = \frac{a_1}{1 - 9r^2}$$

סכום סדרה 2:
$$S = \frac{a_1}{1 - 3r}$$

נבנה את המשוואה המתאימה ונצמצם את a_1:

$$\frac{a_1}{1 - 3r} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a_1}{1 - 9r^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1 - 3r} = \frac{4}{3 - 27r^2}$$

$$3 - 27r^2 = 4 - 12r \quad \rightarrow \quad 0 = 27r^2 - 12r + 1$$

$$r = \frac{1}{3} \qquad r = \frac{1}{9}$$

מכיוון ש- $0 < r < \frac{1}{3}$ אז $r = \frac{1}{9}$

$$q = 3r = \frac{1}{3}$$

סעיף ג':

	איבר ראשון	מנה
סדרה מקורית:	a_1	$q=\frac{1}{3}$
סדרת הזוגיים:	$a_1q=\frac{1}{3}a_1$	$q^2=\frac{1}{9}$

נתון שסכום סדרת הזוגיים הוא 12:

$$S_{\text{זוגיים}}=\frac{\frac{1}{3}a_1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{a_1}{3}}{\frac{8}{9}}=\frac{3a_1}{8}$$

$$\frac{3a_1}{8}=12 \ \rightarrow \ a_1=32$$

	איבר ראשון	מנה
סדרה המקומות המתחלקים ב- 5:	$a_5=32\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{32}{81}$	$q^5=\frac{1}{243}$

נחשב את הסכום:

$$S=\frac{\frac{32}{81}}{1-\frac{1}{243}}=\frac{48}{121}$$

סעיף ד':

סכום כל האיברים בסדרה החל מהאיבר החמישי:

$$S-S_5=\frac{32}{1-\frac{1}{3}}-\frac{32\left(\left(\frac{1}{3}\right)^5-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{16}{81}$$

נמצא את היחס:

$$\frac{a_5}{S-S_5}=\frac{\frac{32}{81}}{\frac{16}{81}}=2$$

סעיף ה':

איבר כלשהו:

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

סכום כל האיברים אחריו:

$$S-S_n=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

$$S-S_n=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1(q^n-1)}{-1+q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1(q^n-1)}{-(1-q)}=\frac{a_1}{1-q}+\frac{a_1(q^n-1)}{(1-q)}$$

$$=\frac{a_1+a_1(q^n-1)}{1-q}=\frac{a_1(1+q^n-1)}{1-q}=\frac{a_1\cdot q^n}{1-q}$$

היחס ביניהם:

$$\frac{a_n}{S-S_n}=\frac{\frac{a_1q^{n-1}}{1}}{\frac{a_1\cdot q^n}{1-q}}=\frac{\cancel{a_1}q^{n-1}\cdot(1-q)}{\cancel{a_1}\cdot q^n}=\frac{\cancel{q^n}\cdot q^{-1}\cdot(1-q)}{\cancel{q^n}}=\frac{1-q}{q}$$