סדרות

סדרות חשבוניות

סדרה חשבונית מורכבת מרצף מספרים הגדלים / קטנים בהפרש קבוע.

בכל סדרה יש מספר משתנים חשובים:

1. איבר ראשון - a_1
2. הפרש - d
3. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה - n
4. איבר כללי (איבר במקום מסויים) - a_n
5. סכום - S_n

<u>נוסחאות:</u>

<u>**איבר כללי**</u>: $a_n = a_1 + d(n-1)$

<u>**סכום**</u>: $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$

<u>דוגמה</u>: עבור רצף המספרים 2,7,12,17,22 מצא את האיבר במקום ה15.

נסמן:

1. איבר ראשון: $a_1 = 2$
2. הפרש: $d = 5$
3. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה: $n = 15$
4. איבר כללי (איבר במקום מסויים): $a_n = ?$

נציב בנוסחת איבר כללי: $a_n = 2 + 5(15-1)$

ונקבל: $a_n = 72$

<u>דוגמה</u>: עבור רצף המספרים 100,92,84 מצא את מיקומו של האיבר שערכו 4.

נסמן:

1. איבר ראשון: $a_1 = 100$
2. הפרש: $d = -8$
3. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה: $n = ?$
4. איבר כללי (איבר במקום מסויים): $a_n = 4$

נציב בנוסחת איבר כללי: $4 = 100 - 8(n-1)$

ונקבל $n = 13$ (כלומר מיקום האיבר בסדרה הוא 13).

כתובת: יד חרוצים 9 הרצליה | טל': 0547660166 | מייל: Hamercazhareali@gmail.com

<u>דוגמה</u>:

עבור סדרה חשבונית נתון: $a_5 = 34$ וגם $a_8 = 52$

מצא את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

<u>שלב ראשון</u>: נבטא את a_5 ואת a_8 באמצעות a_1 ובאמצעות d ע"י הצבה בנוסחת איבר הכללי.

א. $a_5 = a_1 + 4d$
ב. $a_8 = a_1 + 7d$

<u>שלב שני</u>: נציב במערכת משוואות.

א. $a_1 + 4d = 34$
ב. $a_1 + 7d = 52$

<u>שלב שלישי</u>: נחסר את המשוואות אחת מהשניה ונציב את d אחרי שנגלה אותו באחת המשוואות:

- $3d = 18$
- $\boxed{d = 6}$
- $\boxed{a_1 = 10}$

<u>דוגמה</u>: איברים חיוביים ושליליים:

עבור הסדרה: $-49, -46, -43, -40$ מצא כמה איברים שליליים יש בסדרה.

- **כאשר שואלים אותנו כמה איברים חיוביים / שליליים יש בסדרה נסמן באיבר כללי $a_n = 0$ ונחפש כמה איברים יש בסדרה.** אם מספר האיברים יוצא מספר לא שלם נעגל כלפי מטה.

<u>נסמן</u>:

1. איבר ראשון: $a_1 = -49$
2. הפרש: $d = 3$
3. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה: $n = ?$
4. איבר כללי (איבר במקום מסויים): $a_n = 0$

נציב בנוסחת איבר כללי: $0 = -49 + 3(n-1)$

נחשב ונמצא ש $n = 17\frac{1}{3}$

ולכן יש 17 איברים שליליים בסדרה.

כתובת: יד חרוצים 9 הרצליה | טל': 0547660166 | מייל: Hamercazhareali@gmail.com

הגדרת סדרה חשבונית:

בסדרה חשבונית כל האיברים גדלים בהפרש קבוע ולכן:

1. ניתן להגיד שההפרש בין כל 2 איברים בסדרה קבוע (למשל $a_4 - a_3 = a_3 - a_2$)
2. **להוכחת סדרה חשבונית:** $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n} =$ (ביטוי שאינו תלוי ב$\boldsymbol{n}$)

דוגמה:

נתון שרצף הביטויים הבאים מהווה סדרה חשבונית: $-20, 4x\ , x^2$

מצא את שתי האפשרויות לאיברי הסדרה.

1. מכיוון שהסדרה היא סדרה חשבונית ניתן להגיד: $4x - x^2 = -20 - 4x$
2. נעביר אגפים ונקבל $x^2 - 8x - 20 = 0$
3. קיבלנו: $x_1 = -2\ , x_2 = 10$
4. הפיתרון: אופציה א׳: $-20,40,100$ אופציה ב׳: $-20, -8, 4$

דוגמה להוכחת סדרה חשבונית:

נתון שהסדרה $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ היא סדרה חשבונית הוכח שהסדרה

$a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, \dots, a_n + d - a_1$ היא סדרה חשבונית וקבע את ההפרש שלה באמצעות d.

1. להוכחת סדרה חשבונית יש לבדוק האם בסדרה החדשה (ביטוי שאינו תלוי ב$\boldsymbol{n}$) $= \boldsymbol{a_{n+1} - a_n}$
   - $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n} = (n+1) \cdot \mathrm{d} - n \cdot \mathrm{d} = \mathrm{d}$
2. מכיוון שהחיסור בין שני האיברים הוא ביטוי שאינו תלוי בn הסדרה החדשה היא סדרה חשבונית שהפרשה d.

<u>סכום סדרה חשבונית</u>:

סכום סדרה חשבונית מיוצג ע"י הנוסחאות הבאות:

1. $\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]}$
2. $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$
3. $S_n = \frac{n}{2}[2a_n - d(n-1)]$

ברוב התרגילים נשתמש בנוסחה מס' 1.

<u>דוגמה</u>:

נתונה הסדרה החשבונית 5,9,13,17,21 מצאי את סכום עשרת האיברים הראשונים של הסדרה.

<u>נסמן</u>:

1. איבר ראשון: $a_1 = 5$
2. הפרש: $d = 4$
3. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה: $n = 10$
4. סכום: $S_n = ?$

נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $S_{10} = \frac{10}{2}[2 \cdot 5 + 4(10-1)]$

ונקבל: $S_{10} = 230$

<u>דוגמה</u>:

כמה איברים מהסדרה 50,45,40,35 יש לחבר כדי שסכומם יהיה 0?

<u>נסמן</u>:

1. איבר ראשון: $a_1 = 50$
2. הפרש: $d = -5$
3. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה: $n = ?$
4. סכום: $S_n = 0$

נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $0 = \frac{n}{2}[2 \cdot 50 - 5(n-1)]$

נקבל משוואה ריבועית, נפסול את הפיתרון של $n = 0$ ונקבל ש $n = 21$

הוכחת סדרה חשבונית:

כאשר יבקשו מאתנו להוכיח סדרה חשבונית בעזרת נוסחת סכום נזכור שהתנאי להוכחה הוא:

$$\boldsymbol{a_{n+1}-a_n=}\ (\text{ביטוי שאינו תלוי ב } \boldsymbol{n})$$

אם נתונה לנו נוסחת סכום נוכל לגלות את a_n ו a_{n+1} ולפתור את התרגיל באופן הבא:

- שלב ראשון: $\boldsymbol{s_n-s_{n-1}=a_n}$
- שלב שני: מציבים $n+1$ בנוסחה של $\boldsymbol{a_n}$
- שלב שלישי: הפרש הסדרה $\boldsymbol{=a_{n+1}-a_n}$

<u>דוגמה</u>**:** הוכחת סדרה חשבונית:

סכום n האיברים הראשונים בסדרה כלשהי הוא $S_n=2n^2-5n$ הוכיחי שהסדרה היא סדרה חשבונית ומצאי את האיבר הכללי וההפרש של הסדרה.

- שלב ראשון: $s_n-s_{n-1}=\ 2n^2-5n-[2(n-1)^2-5(n-1)]$
ולכן: $a_n=4n-7$

- שלב שני: $a_{n+1}=4(n+1)-3$
ולכן: $a_{n+1}=4n-3$

- שלב שלישי: $a_{n+1}-a_n=4$

בצורה זו הוכחנו שהסדרה היא סדרה חשבונית כאשר האיבר הכללי שלה הוא $a_n=4n-7$ והפרשה 4.

- **<u>טיפ</u>**: במידה והאלגברה בתרגילים קשה ניתן להציב בנוסחת סכום $n=1,2,3$
בצורה הזו אפשר לגלות את האיבר הראשון השני והשלישי של הסדרה וכך יודעים לאיזו תשובה צריך להגיע.

<u>סכום איברים אחרונים</u>: שיבקשו מאיתנו את סכום האיברים האחרונים נפתור את התרגיל בצורה הבאה:

- נגלה את סכום כל האיברים
- נגלה את סכום האיברים הראשונים עד האיבר הספציפי
- נחסר את סכום האיברים הראשונים מסכום כל האיברים.

<u>דוגמה</u>: סכום איברים אחרונים:

בסדרה 3,7,11,15 קיימים 20 איברים. מה סכום חמשת האיברים האחרונים של הסדרה?

- שלב ראשון: $S_{20}=\frac{20}{2}[2\cdot 3+4(20-1)]=820$
- שלב שני: $S_{15}=\frac{15}{2}[2\cdot 3+4(15-1)]=465$
- שלב שלישי $S_{\text{5 אחרונים}}=820-465=355$

כתובת: יד חרוצים 9 הרצליה | טל": 0547660166 | מייל: Hamercazhareali@gmail.com

<u>סכום איברים זוגיים ואי זוגיים</u> :

בפתרון בעיות מסוג זה נפצל את הסדרה הקיימת ל2 סדרות חדשות : סדרת איברים זוגיים וסדרת איברים אי זוגיים. הפיתרון יראה כך :

- עבור מס' זוגי של איברים

	סדרה מקורית	סדרת אי זוגיים	סדרת זוגיים
איבר ראשון	a_1	a_1	$a_1 + d$
הפרש	d	$2d$	$2d$
מספר איברים	$2n$	n	n

- עבור מס' אי זוגי של איברים מס' האיברים האי זוגיים גדול באחד

	סדרה מקורית	סדרת אי זוגיים	סדרת זוגיים
איבר ראשון	a_1	a_1	$a_1 + d$
הפרש	d	$2d$	$2d$
מספר איברים	$2n + 1$	$n + 1$	n

<u>דוגמה :</u> סכום איברים זוגיים ואי זוגיים.

בסדרה חשבונית 30 איברים, האיבר הראשון הוא 5 והפרש הסדרה הוא 7, חשבי את סכום האיברים הזוגיים והאי זוגיים.

נסמן :

	סדרה מקורית	סדרת אי זוגיים	סדרת זוגיים
איבר ראשון	5	5	12
הפרש	7	14	14
מספר איברים	30	15	15

עבור אי זוגיים נציב את הנתונים בנוסחת סכום : $S_{\text{אי זוגיים}} = \frac{15}{2}[2 \cdot 5 + 14(15-1)]$

ולכן : $S_{\text{אי זוגיים}} = 1545$

עבור זוגיים נציב את הנתונים בנוסחת סכום : $S_{\text{זוגיים}} = \frac{15}{2}[2 \cdot 12 + 14(15-1)]$

ולכן : $S_{\text{זוגיים}} = 1650$

המרכז הריאלי

סדרות הנדסיות

סדרה חשבונית מורכבת מרצף מספרים הגדלים / קטנים במנה קבועה.

בכל סדרה יש מספר משתנים חשובים:

6. איבר ראשון - a_1
7. מנה - q
8. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה - n
9. איבר כללי (איבר במקום מסוים) - a_n
10. סכום - S_n

<u>נוסחאות</u>:

<u>איבר כללי</u>: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

<u>סכום</u>: $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

<u>סדרה הנדסית עולה</u>: סדרה בה המנה גדולה מ1 $1 < q$ והאיבר הראשון חיובי $a_1 > 0$

או מנה בין 0 ל-1: $0 < q < 1$ והאיבר הראשון שלילי $a_1 < 0$

דוגמה: $1,3,9,27,81$

<u>סדרה הנדסית יורדת</u>: סדרה בה המנה קטנה מ1 וגדולה מ-0 $0 < q < 1$ ואיבר ראשון חיובי $a_1 > 0$

או מנה גדולה מ1 $q > 1$ ואיבר ראשון שלילי $a_1 < 0$.

דוגמה: $200,100,50,25$

<u>סדרה הנדסית מתחלפת</u>: סדרה בה המנה קטנה מ0. $q < 0$

דוגמה: $1,-3,9,-27,81$

דוגמה: $200,-100,50,-25$

<u>דוגמה</u>: עבור רצף המספרים 2,8,32,124 מצאי את האיבר במקום ה8.

נסמן:

5. איבר ראשון $a_1 = 2$
6. מנה $q = 4$
7. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה $n = 8$
8. איבר כללי (איבר במקום מסויים) $a_n = ?$

נציב בנוסחת איבר כללי: $a_8 = 2 \cdot 4^{8-1}$

ונקבל: $a_8 = 32768$

דוגמה : עבור רצף המספרים 3645,1215,405 מצאי את מיקומו של האיבר שערכו 5.

נסמן :

5. איבר ראשון $a_1 = 3645$
6. מנה $q = \frac{1}{3}$
7. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה $n = ?$
8. איבר כללי (איבר במקום מסויים) $a_n = 5$

נציב בנוסחת איבר כללי : $5 = 3645 \cdot (\frac{1}{3})^{n-1}$

ונקבל $n = 7$ (כלומר מיקום האיבר בסדרה הוא 7).

פתרון אלגברי:

- $5 = 3645 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
- $\frac{5}{3645} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
- $\frac{1}{729} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
- $n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{1}{729}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$
- $n - 1 = 6$
- $n = 7$

דוגמה :

עבור סדרה הנדסית נתון : $a_4 = 384$ וגם $a_6 = 6144$

מצאי את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

שלב ראשון : נבטא את a_4 ואת a_6 באמצעות a_1 ובאמצעות q ע״י הצבה בנוסחת איבר הכללי.

ג. $a_4 = a_1 \cdot q^3$
ד. $a_6 = a_1 \cdot q^5$

שלב שני : נציב במערכת משוואות.

ג. $a_1 \cdot q^3 = 384$
ד. $a_1 \cdot q^5 = 6144$

שלב שלישי : נחלק את המשוואות אחת בשנייה ונציב את q אחרי שנגלה אותו באחת המשוואות :

- $\mathrm{q}^2 = 16$
- $\mathrm{q} = 4$ או $\mathrm{q} = -4$
- $a_1 = 6$ או $a_1 = -6$

פתרון אלגברי:

- $\frac{a_1 \cdot q^5}{a_1 \cdot q^3} = \frac{6144}{384}$
- $\mathrm{q}^2 = 16$
- $\sqrt{\mathrm{q}^2} = \sqrt{16}$
- $\mathrm{q} = 4$ או $\mathrm{q} = -4$

הגדרת סדרה הנדסית:

בסדרה הנדסית כל האיברים גדלים במנה קבועה ולכן:

3. ניתן להגיד שהמנה בין כל 2 איברים בסדרה קבועה (למשל $\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_3}{a_2}$)
4. **להוכחת סדרה הנדסית:** (ביטוי שאינו תלוי ב$\boldsymbol{n}$) $= \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}$

דוגמה:

נתון שרצף הביטויים הבאים מהווה סדרה הנדסית יורדת: $25, x-1, x-5$

מצאי את שתי האפשרויות לאיברי הסדרה.

5. מכיוון שהסדרה היא סדרה הנדסית ניתן להגיד: $\frac{x-1}{x-5}=\frac{25}{x-1}$
6. כפל בהצלבה ונקבל $x^2-2x+1=25x-125$
7. קיבלנו: $x_1=21, x_2=6$
8. פתרון: אופציה א': $25,20,16$ אופציה ב': $25,5,1$

דוגמה להוכחת סדרה הנדסית:

נתון שהסדרה $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ היא סדרה הנדסית הוכיחי שהסדרה

$(a_1)^3, (a_2)^3, (a_3)^3, (a_4)^3 \dots (a_n)^3$ היא סדרה הנדסית וקבעי את המנה שלה באמצעות q.

3. שיטה נוחה לפתרון בעיות בסדרות היא סימון האיברים באמצעות טבלה:

איבר	סדרה מקורית	סדרה חדשה
ראשון	a_1	$(a_1)^3$
שני	$a_1 \cdot q$	$(a_1)^3 \cdot q^3$
שלישי	$a_1 \cdot q^2$	$(a_1)^3 \cdot q^6$
רביעי	$a_1 \cdot q^3$	$(a_1)^3 \cdot q^9$
איבר כללי a_n	$a_1 \cdot q^{n-1}$	$(a_1)^3 \cdot q^{3n-3}$
איבר אחד אחרי האיבר הכללי a_{n+1}	$a_1 \cdot q^n$	$(a_1)^3 \cdot q^{3n}$

4. להוכחת סדרה חשבונית יש לבדוק האם בסדרה החדשה (ביטוי שאינו תלוי ב$\boldsymbol{n}$) $= \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}$
   - $\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{(a_1)^3 \cdot q^{3n}}{(a_1)^3 \cdot q^{3n-3}}=q^3$
5. מכיוון שהמנה בין שני האיברים הוא ביטוי שאינו תלוי בn הסדרה החדשה היא סדרה הנדסית שמנתה q^3.

<u>סכום סדרה הנדסית</u>:

סכום סדרה הנדסית מיוצג ע"י הנוסחה הבאה:

- $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

<u>דוגמה</u>:

נתונה הסדרה החשבונית 1,5,25,125 מצאי את סכום שבעת האיברים הראשונים של הסדרה.

<u>נסמן</u>:

5. איבר ראשון: $a_1 = 1$
6. מנה: $q = 5$
7. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה: $n = 7$
8. סכום: $S_n = ?$

נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $S_n = \frac{1(5^7-1)}{5-1}$

ונקבל: $S_7 = 19531$

<u>דוגמה</u>:

כמה איברים מהסדרה 6,18,54,162 יש לחבר כדי שסכומם יהיה 6558?

<u>נסמן</u>:

5. איבר ראשון: $a_1 = 6$
6. מנה: $q = 3$
7. מספר איברים / מיקום איבר בסדרה: $n = ?$
8. סכום: $S_n = 6558$

נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $6558 = \frac{6(3^n-1)}{3-1}$

נפתור את המשוואה ונקבל ש $n = 7$

<u>פתרון אלגברי:</u>

- $6558 = \frac{6(3^n-1)}{3-1}$
- $2187 = 3^n$
- $n = \frac{\ln(2187)}{\ln(3)}$
- $n = 7$

הוכחת סדרה הנדסית:

כאשר יבקשו מאיתנו להוכיח סדרה הנדסית בעזרת נוסחת סכום נזכור שהתנאי להוכחה הוא:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\text{ביטוי שאינו תלוי ב}\,n)$$

אם נתונה לנו נוסחת סכום נוכל לגלות את a_n ו a_{n+1} ולפתור את התרגיל באופן הבא:

- שלב ראשון: $s_n - s_{n-1} = a_n$
- שלב שני: מציבים $n+1$ בנוסחה של a_n
- שלב שלישי: מנת הסדרה $= \frac{a_{n+1}}{a_n}$

דוגמה: הוכחת סדרה הנדסית:

סכום n האיברים הראשונים בסדרה כלשהי הוא $S_n = 3^{n+1} - 3$ הוכיחי שהסדרה היא סדרה הנדסית ומצאי את האיבר הכללי והמנה של הסדרה.

- שלב שני: $s_n - s_{n-1} = 3^{n+1} - 3 - [3^n - 3]$
  ולכן: $a_n = 2 \cdot 3^n$
- שלב שני: $a_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1}$
  ולכן: $a_{n+1} = 6 \cdot 3^n$
- שלב שלישי: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$

בצורה זו הוכחנו שהסדרה היא סדרה הנדסית כאשר האיבר הכללי שלה הוא $a_n = 2 \cdot 3^n$ ומנתה 3.

- **טיפ**: במידה והאלגברה בתרגילים קשה ניתן להציב בנוסחת סכום $n = 1,2,3$
  בצורה הזו אפשר לגלות את האיבר הראשון השני והשלישי של הסדרה וכך יודעים לאיזו תשובה צריך להגיע.

סכום איברים אחרונים: שיבקשו מאתנו את סכום האיברים האחרונים נפתור את התרגיל בצורה הבאה:

- נגלה את סכום כל האיברים
- נגלה את סכום האיברים הראשונים עד האיבר הספציפי
- נחסר את סכום האיברים הראשונים מסכום כל האיברים.

דוגמה: סכום איברים אחרונים:

בסדרה 2,14,42,126 קיימים 10 איברים. מה סכום ארבעת האיברים האחרונים של הסדרה?

- שלב ראשון: $S_{10} = \frac{2(7^{10}-1)}{7-1} = 94158416$
- שלב שני: $S_6 = \frac{2(7^6-1)}{6-1} = 39216$
- שלב שלישי: $S_{\text{4 אחרונים}} = 94158416 - 39216 = 94119200$

כתובת: יד חרוצים 9 הרצליה | טל': 0547660166 | מייל: Hamercazhareali@gmail.com

<u>סכום איברים זוגיים ואי זוגיים</u>:

בפתרון בעיות מסוג זה נפצל את הסדרה הקיימת ל2 סדרות חדשות: סדרת איברים זוגיים וסדרת איברים אי זוגיים. הפתרון יראה כך:

- עבור מס' זוגי של איברים

	סדרה מקורית	סדרת אי זוגיים	סדרת זוגיים
איבר ראשון	a_1	a_1	$a_1 \cdot q$
מנה	q	q^2	q^2
מספר איברים	$2n$	n	n

- עבור מס' אי זוגי של איברים מס' האיברים האי זוגיים גדול באחד

	סדרה מקורית	סדרת אי זוגיים	סדרת זוגיים
איבר ראשון	a_1	a_1	$a_1 \cdot q$
מנה	q	q^2	q^2
מספר איברים	$2n$	$n+1$	n

<u>דוגמה</u>: סכום איברים זוגיים ואי זוגיים.

בסדרה הנדסית 11 איברים, האיבר הראשון הוא 5 ומנת הסדרה היא 3, חשבי את סכום האיברים הזוגיים והאי זוגיים.

נסמן:

	סדרה מקורית	סדרת אי זוגיים	סדרת זוגיים
איבר ראשון	5	5	15
מנה	3	9	9
מספר איברים	11	6	5

עבור אי זוגיים נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $S_{\text{אי זוגיים}} = \frac{5(9^6-1)}{9-1}$

ולכן: $S_{\text{אי זוגיים}} = 332150$

עבור זוגיים נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $S_{\text{זוגיים}} = \frac{15(9^5-1)}{9-1}$

ולכן: $S_{\text{זוגיים}} = 110715$

סכום סדרה הנדסית אינסופית:

סדרה הנדסית אינסופית היא סדרה הנדסית שלרוב יורדת ($-1 < q < 1$) בעלת אינסוף איברים.

נוסחה: $S_{\text{אינסופית}} = \frac{a_1}{1-q}$

דוגמה: נתון טור הנדסי אינסופי שהאיבר הראשון בו הוא 6 ומנתו 0.5, מהו סכום הטור?

נסמן:

1. איבר ראשון: $a_1 = 6$
2. מנה: $q = 0.5$
3. סכום: $S_{\text{אינסופית}} = ?$

נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $S_{\text{אינסופית}} = \frac{6}{1-0.5}$

ונקבל: $S_{\text{אינסופית}} = 12$

דוגמה: נתון טור הנדסי אינסופי שהאיבר הראשון בו הוא 80 וסכומו 200, מהי מנת הטור?

נסמן:

1. איבר ראשון: $a_1 = 80$
2. מנה: $q = ?$
3. סכום: $S_{\text{אינסופית}} = 200$

נציב את הנתונים בנוסחת סכום: $200 = \frac{80}{1-q}$

ונקבל: $q = 0.6$

כתובת: יד חרוצים 9 הרצליה | טל": 0547660166 | מייל: Hamercazhareali@gmail.com

בגרות קיץ 2019 מועד א' שאלה 1

a_n היא סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא a_1 וההפרש שלה הוא 4.

b_n היא סדרה המוגדרת כך: $b_n = a_n + 8n$.

א. הוכח כי b_n היא סדרה חשבונית ומצא את ההפרש שלה.

c_n היא סדרה המוגדרת כך: $c_n = a_n + b_n$.

ב. הוכח כי c_n היא סדרה חשבונית.

נתון: $a_1 = \frac{1}{2}$.

ג. **(1)** מצא את c_1.

(2) מצא את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה c_n.

<u>סעיף א׳:</u>

כדי להוכיח ש-b_n סדרה חשבונית, נצטרך להראות שההפרש בין שני איברים עוקבים כלליים אינו תלוי ב-n. ואמנם נראה:

$$b_{n+1} - b_n = \left(a_{n+1} + 8(n+1)\right) - (a_n + 8n) = a_{n+1} + 8n + 8 - a_n - 8n$$
$$= (a_{n+1} - a_n) + 8 = d_a + 8 = 4 + 8 = 12$$

כלומר, הסדרה חשבונית והפרשה הוא 12.

<u>סעיף ב׳:</u>

כדי להוכיח ש-c_n סדרה חשבונית, נצטרך להראות שההפרש בין שני איברים עוקבים כלליים אינו תלוי ב-n. ואמנם נראה:

$$c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n) = d_a + d_b$$
$$= 4 + 12 = 16$$

כלומר, הסדרה חשבונית והפרשה הוא 16.

<u>סעיף ג׳1:</u>

נחשב את b_1 ולאחר מכן את c_1.

לפי ההגדרה:

$$b_1 = a_1 + 8 \cdot 1 = 0.5 + 8 = 8.5$$

$$c_1 = a_1 + b_1 = 0.5 + 8.5 = 9$$

וזה בדיוק מה שרצינו.

סעיף ג'2 :

כפי שראינו, $n = 20$, $c_1 = 9$, $d_c = 16$. נפעיל את נוסחת חישוב הסכום ונקבל תוצאה :

$$S_{20} = \frac{20[2 \cdot 9 + 16 \cdot (19)]}{2} = 10[18 + 304] = 3220$$