מרוכבים

הגדרות:

מספר ממשי - מספר שלא מכיל חלק מדומה (i) לדוגמה : 1,2,3

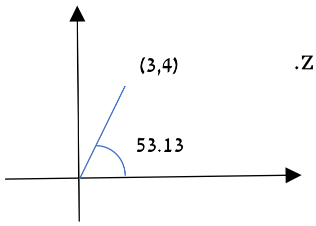
מספר מדומה - מספר שמכיל רק חלק מדומה (i) ולא מכיל חלק ממשי. לדוגמה : $i, 2i, 3i$

מספר מרוכב - מספר המכיל חלק ממשי וחלק מדומה. מספר מרוכב יסומן באות Z לדוגמה : $z = 3 + 2i$

הצגה קרטזית : $z = x + yi$ נקראת קרטזית כי x מייצג ערך אופקי במערכת צירים וy מייצג ערך אנכי במערכת צירים.

מספר צמוד : מספר צמוד ייוצג כך : $\bar{z} = x - yi$

הצגה טריגונומטרית : $z = r\cos\theta + i \cdot r\sin\theta$ או בקיצור $z = r\mathrm{cis}\theta$ כאשר r מייצג את המרחק מראשית הצירים וθ מייצג את הזוית כנגד הכיוון החיובי של ציר x.



לדוגמה : המספר $z = 3 + 4i$ מיוצג בהצגה טריגונומטרית כ $z = 5\mathrm{cis}53.13$.

דוגמה גרפית : (מישור של גאוס)

מעבר מהצגה קרטזית לטריגונומטרית :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

- אם הx והy שליליים אז מוסיפים 180 לזוית

מעבר מהצגה טריגונומטרית לקרטזית :

$$x = r \cdot \cos\theta$$

$$y = r \cdot \sin\theta$$

פעולות על מספרים מרוכבים הצגה קרטזית:

1. חיבור : $a + bi + x + yi = a + x + i(b + y)$
2. חיסור : $a + bi - (x + yi) = a - x + i(b - y)$
3. כפל : $(a + bi)(x + yi) = ax + ayi + bix - by$
4. חילוק : $\frac{a+bi}{x+yi} = \frac{(a+bi)(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{ax-ayi+xbi+by}{x^2+y^2}$
   - בחילוק בקרטזי עושים כפל בצמוד.
5. העלאה בריבוע : $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$

טיפ : הפעולות שכדאי לעשות בהצגה קרטזית הן חיבור וחיסור

כתובת: יד חרוצים 9 הרצליה | טל": 0547660166 | מייל: Hamercazhareali@gmail.com

פעולות על מספרים מרוכבים הצגה טריגונומטרית:

1. כפל: $r cis\theta \cdot R cis\alpha = (r \cdot R) cis(\theta + \alpha)$
2. חילוק: $\frac{r cis\theta}{R cis\alpha} = \frac{r}{R} cis(\theta - \alpha)$
3. העלאה בחזקה: $(r cis\theta)^n = r^n \cdot cis(n \cdot \theta)$
4. הוצאת שורש: $\sqrt[n]{r cis\theta} = \sqrt[n]{r} cis(\frac{\theta}{n} + \frac{360°k}{n})$

טיפ: פעולות שכדאי לעשות בהצגה טריגונומטרית הן כפל, חילוק, העלאה בחזקה והוצאת שורש.

סדרות במרוכבים: (ירד במיקוד קיץ 2022)

- סדרה חשבונית נפתרת בהצגה קרטזית
- סדרה הנדסית נפתרת בהצגה טריגונומטרית

מקומות גאומטריים במספרים מרוכבים:

- כמו בשאלות בגיאומטריה אנליטית, יש להגיע לקשר כלשהו בין x ל- y.

פתרון משוואות ריבועיות במרוכבים:

$$z^2 + 6z + 13 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 13}}{2}$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$z_1 = -3 + 2i$$

$$z_2 = -3 - 2i$$

צורות חסומות במעגל קנוני:

אותו רעיון של הוצאת שורש של מספר מרוכב (דוגמא בהמשך).

כתובת: יד חרוצים 9 הרצליה | טל': 0547660166 | מייל: Hamercazhareali@gmail.com

סיכום:

1. מספר מרוכב: $z = x + yi$
2. מספר צמוד: $\bar{z} = x - yi$
3. ערך מוחלט: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
4. מעבר להצגה טריגונומטרית במחשבון לוחצים: $\text{Shift} + \text{Pol}(x, y)$
5. מעבר להצגה קרטזית במחשבון לוחצים: $\text{Shift} + \text{Rec}(r, \theta)$

פעולות בהצגה קרטזית

6. חיבור: $a + bi + x + yi = a + x + i(b + y)$
7. חיסור: $a + bi - (x + yi) = a - x + i(b - y)$
8. כפל: $(a + bi)(x + yi) = ax + ayi + bix - by$
9. חילוק: $\frac{a + bi}{x + yi} = \frac{(a + bi)(x - yi)}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{ax - ayi + xbi + by}{x^2 + y^2}$
10. העלאה בריבוע: $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$

פעולות בהצגה טריגונומטרית

11. כפל: $r\text{cis}\theta \cdot R\text{cis}\alpha = (r \cdot R)\text{cis}(\theta + \alpha)$
12. חילוק: $\frac{r\text{cis}\theta}{R\text{cis}\alpha} = \frac{r}{R}\text{cis}(\theta - \alpha)$
13. העלאה בחזקה: $(r\text{cis}\theta)^n = r^n \cdot \text{cis}(n \cdot \theta)$
14. הוצאת שורש: $\sqrt[n]{r\text{cis}\theta} = \sqrt[n]{r}\text{cis}(\frac{\theta}{n} + \frac{360°k}{n})$

דוגמאות:

דוגמה לסדרות עם מספרים מרוכבים:

בסדרה הנדסית נתון: $a_2 = -4 \qquad a_5 = 32i$

מצא את מנת הסדרה.

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 32i$$

נחלק את שתי המשוואות:

$$a_2 = a_1 \cdot q = -4$$

נצמצם את a_1

$$\frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q} = \frac{32i}{-4}$$

$$q^3 = -8i$$

$$q = 2i$$

דוגמה לצורות חסומות במעגל קנוני:

z_1 הוא קודקוד של מחומש משוכלל החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים, $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$

מצא את הקודקודים הנמצאים ברביע השני.

נבטא את z_1 בהצגה טריגונומטרית:

$$r = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta = 30°$$

מרכז המחומש הוא במרכז המעגל ולכן הזווית המרכזית של המחומש היא $72°$, כיוון שהמחומש כלוא במעגל קנוני, או המרחק של כל קודקוד מהמרכז יהיה שווה לרדיוס.

$$z_1 = \sqrt{12}cis30$$

נוסיף $72°$ לזוויות של z_1 בשביל למצוא את הקודקוד הבא (נגד כיוון השעון)

$$z_1 = \sqrt{12}cis102$$

נוסיף שוב $72°$ בשביל למצוא את הקודקוד הבא:

$$z_1 = \sqrt{12}cis174$$

שני הקודקודים האלו נמצאים ברביע השני

דוגמה למציאת מקום גיאומטרי :

מצא את משוואת המקום הגיאומטרי שעליו נמצאים פתרונות המשוואה $z^3 = 4 - 4\sqrt{3}i$

נעביר להצגה טריגונומטרית :

$$r = \sqrt{4^2 + \left(-4\sqrt{3}\right)^2} = 8$$

$$\tan\theta = \frac{-4\sqrt{3}}{4}$$

נעביר את הזווית לחיובית אז נוסיף 360 :

$$\theta = -60°$$

$$\theta = 300°$$

כעת נוציא שורש בעזרת משפט דה-מוהבר :

$$z^3 = 8cis300$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}cis\left(\frac{300}{3}\frac{+360k}{3}\right)$$

$k = 0$ $\quad z_1 = 2cis100$

$k = 1$ $\quad z_2 = 2cis220$

$k = 2$ $\quad z_3 = 2cis340$

הפתרונות הם מספרים מרוכבים בעלי רדיוסים שווים אך זוית משתנה, כלומר הם ממוקמים על מעגל שרדיוסו 2

משוואת המעגל:

$$x^2 + y^2 = 4$$

ידוע ש :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

לכן ניתן לכתוב את משוואת המעגל גם כך :

$$|z| = 2$$

בגרות חורף 2022 מועד נבצרים שאלה 3:

א. פתור את המשוואה: $(z+i)^2-2-2\sqrt{3}i=0$, z הוא מספר מרוכב.

נסמן את החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה ב־a_1 וב־a_2 כך ש־$a_1<a_2$.

נתונים שני מקומות גאומטריים:

I. $|z-ia_1|=\sqrt{3}$

II. $|z-ia_2|=\sqrt{3}$

ב. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.

הישר $y=x$ נמצא במישור גאוס. ישר זה חותך את המקומות הגאומטריים שסרטטת בסעיף ב בראשית הצירים ובשתי נקודות אחרות שמיוצגות על ידי שני המספרים המרוכבים w_1 ו־w_2 .

ג. פתור את המשוואה: $z^3=w_1\cdot\overline{w_1}\cdot w_2\cdot\overline{w_2}$, z הוא מספר מרוכב.

סעיף א':

נציב $z=x+iy$ ונקבל:

$$(x+iy+i)^2-2-2\sqrt{3}i=0 \to (x+(1+y)i)^2=2+2\sqrt{3}i$$

$$x^2+2(1+y)xi-(1+y)^2=2+2\sqrt{3}i \to \begin{cases} x^2-(1+y)^2=2 \\ 2(1+y)x=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x^2-(1+y)^2=2 \\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{1+y} \end{cases} \to \left(\frac{\sqrt{3}}{1+y}\right)^2-(1+y)^2=2 \to \frac{3}{(1+y)^2}-(1+y)^2=2$$

נעשה מכנה משותף ונקבל:

$$3-(1+y)^4=2(1+y)^2$$

נסמן $(1+y)^2=t$ ונקבל משוואה ריבועית: $3-t^2=2t \to t^2+2t-3=0$

$$\begin{cases} t_1=-3 \\ t_2=1 \end{cases} \to \begin{cases} (1+y)^2=-3 \\ (1+y)^2=1 \end{cases} \to \begin{cases} \text{אין פתרון} \\ 1+y=\pm 1 \end{cases} \to \quad y_1=0, \qquad y_2=-2$$

נמצא את שיעורי ה-x המתאימים לכל אחד מהפתרונות:

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{1+y_1}=\frac{\sqrt{3}}{1+0}=\sqrt{3}, \qquad x_2=\frac{\sqrt{3}}{1+y_2}=\frac{\sqrt{3}}{1-2}=-\sqrt{3}$$

בהתאם נקבל: $z_1=x_1+iy_1=\sqrt{3}$ $\quad z_2=x_2+iy_2=-\sqrt{3}-2i$

סעיף ב':

מסעיף קודם נסיק כי $a_2=\sqrt{3}$ $\; a_1=-\sqrt{3}$

נציב $z=x+iy$ ונפתור את המקום הגיאומטרי הנ"ל עבור a כללי, כלומר:

$$|z-ia|=\sqrt{3} \to |x+iy-ia|=\sqrt{3} \to |x+i(y-a)|=\sqrt{3}$$

נביע את הגודל הנ"ל לפי $\sqrt{(\text{רכיב ממשי})^2+(\text{רכיב מדומה})^2}=|\text{מספר מרוכב}|$:

$$\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\sqrt{3} \to x^2+(y-a)^2=3$$

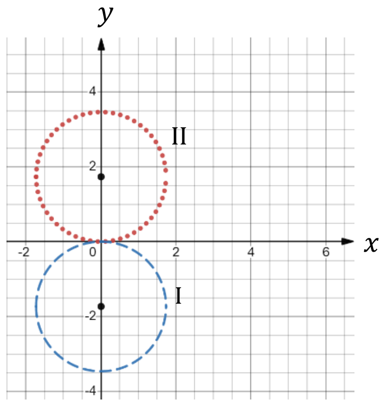
עבור מקום גיאומטרי I נציב $a=a_1=-\sqrt{3}$ ונקבל:

מעגל שמרכזו $(0,-\sqrt{3})$ ורדיוסו $\sqrt{3}$ $\quad$ $\mathbf{I}:\ x^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=3$

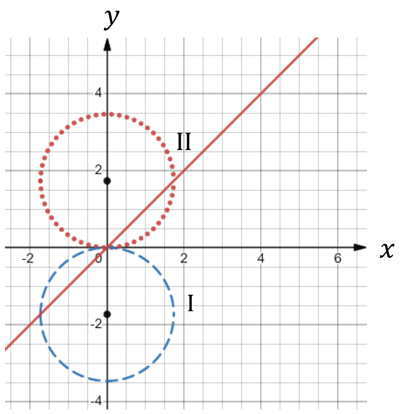
עבור מקום גיאומטרי II נציב $a=a_2=\sqrt{3}$ ונקבל:

מעגל שמרכזו $(0,\sqrt{3})$ ורדיוסו $\sqrt{3}$ $\quad$ $\mathbf{II}:\ x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=3$

נשרטט את שני המעגלים במערכת צירים:



<u>סעיף ג':</u>



נקודת החיתוך בין הישר $y=x$ למקום גיאומטרי I:

$$x^2+\left(x+\sqrt{3}\right)^2=3\rightarrow x^2+x^2+2\sqrt{3}x+3=3$$

$$x_1=0\ ,x_2=-2\sqrt{3}\quad\rightarrow\quad w_1\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$$

נקודת החיתוך בין הישר $y=x$ למקום גיאומטרי II:

$$x^2+\left(x-\sqrt{3}\right)^2=3\rightarrow x^2+x^2-2\sqrt{3}x+3=3$$

$$x_1=0\ ,x_2=\sqrt{3}\quad\rightarrow\quad w_2\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$$

נזכור כי $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$ ולכן:

$$w_1\cdot\overline{w_1}=3+3=6\ ,w_2\cdot\overline{w_2}=3+3=6$$

מכאן נסיק כי $z^3=w_1\cdot\overline{w_1}\cdot w_2\cdot\overline{w_2}=6\cdot 6=36=36cis(0)$

נשתמש במשפט דה-מואבר ונוציא שורש מסדר 3:

$$z_k=\sqrt[3]{36}cis\left(\frac{0}{3}+\frac{360}{3}k\right)_{k=0,1,2}\rightarrow\begin{cases}z_0=\sqrt[3]{36}cis(0)=\sqrt[3]{36}\\ z_1=\sqrt[3]{36}cis(120^\circ)\\ z_2=\sqrt[3]{36}cis(240^\circ)\end{cases}$$