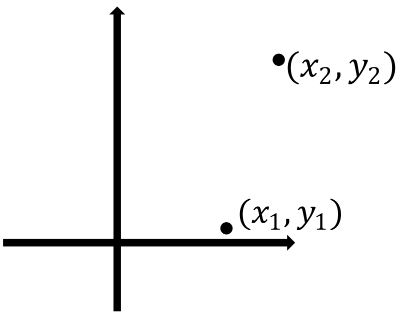
גיאומטריה אנליטית

גיאומטריה אנליטית היא גיאומטריה על מערכת צירים. עבור 2 נקודות במערכת צירים נתונות הנוסחאות הבאות :



1. <u>שיפוע בין 2 נקודות :</u> $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
2. <u>משוואת ישר :</u> $y-y_1=m(x-x_1)$
3. <u>משוואת ישר העובר דרך (x_1,y_1) ומקביל לציר ה-x :</u> $y=y_1$
4. <u>משוואת ישר העובר דרך (x_1,y_1) ומקביל לציר ה-y :</u> $x=x_1$
5. <u>אמצע קטע :</u> $x_{\text{אמצע}}=\frac{x_1+x_2}{2}$ $\quad y_{\text{אמצע}}=\frac{y_1+y_2}{2}$
6. <u>נוסחת מרחק :</u> $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
7. <u>שיפועים מאונכים :</u> שיפוע מאונך הופכי נגדי $m_1\cdot m_2=-1$
8. <u>ישרים מקבילים :</u> בעלי שיפועים שווים $m_1=m_2$
9. <u>משוואת מעגל :</u> $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

למציאת שיפוע מאונך עושים מינוס אחד חלקי השיפוע

<u>למציאת נקודות חיתוך עם הצירים :</u>

- לחיתוך עם ציר ה-x משווים את ה-y לאפס.
- לחיתוך עם ציר ה-y משווים את ה-x לאפס.

<u>למציאת נקודת חיתוך בין 2 ישרים :</u>

א. משווים בין 2 הישרים ומגלים כמה x שווה.

ב. מציבים את ה-x שגילינו באחד הישרים ומגלים את ה-y.

<u>למציאת נקודת חיתוך בין ישר ומעגל :</u>

א. מציבים את הישר במקום ה-y של המעגל.

ב. פותחים סוגריים ומפשטים עד שמקבלים משוואה ריבועית.

ג. עושים נוסחת שורשים ומגלים את שיעור ה-x.

ד. את שיעור ה-x מציבים במשוואת ישר כדי לגלות את שיעור ה-y.

כתובת: יד חרוצים 9 הרצליה | טל': 0547660166 | מייל: Hamercazhareali@gmail.com

דוגמאות למציאת נקודות חיתוך

דוגמאות במציאת נקודות חיתוך בין ישרים ועם הצירים :

נתונים שני הישרים : $y = -x + 4$ $y = x + 2$

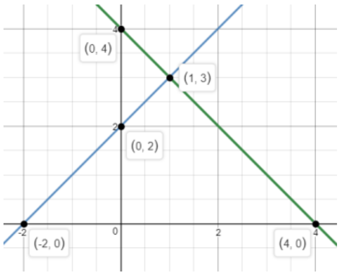
א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של כל אחד מהישרים.
ב. מצא את נקודת החיתוך של הישרים.

פתרון א' : נקודת חיתוך עם ציר ה-x : מציבים $y = 0$.
נקודת חיתוך עם ציר ה-y : מציבים $x = 0$.

$y = -x + 4$		$y = x + 2$	
חיתוך עם ציר ה-x	חיתוך עם ציר ה-y	חיתוך עם ציר ה-x	חיתוך עם ציר ה-y
$0 = -x + 4$	$y = -0 + 4$	$0 = x + 2$	$y = 0 + 2$
$x = 4$	$y = 4$	$x = -2$	$y = 2$
$(4,0)$	$(0,4)$	$(-2,0)$	$(0,2)$

פתרון ב' : משווים בין הישרים.

משווים בין הישרים $x + 2 = -x + 4$
מעבירים אגפים $2x = 2$
מבודדים את ה-x $x = 1$
מציבים באחד מהישרים $y = 1 + 2$
נקודת החיתוך היא : $(1,3)$



כתובת: יד חרוצים 9 הרצליה | טל": 0547660166 | מייל: Hamercazhareali@gmail.com

<u>דוגמאות במציאת נקודות חיתוך של מעגל עם הצירים ונקודות חיתוך בין ישר ומעגל:</u>

נתון הישר $y = x + 2$ ונתונה משוואת המעגל $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של המעגל.
ב. מצא את נקודת החיתוך של הישר עם המעגל.

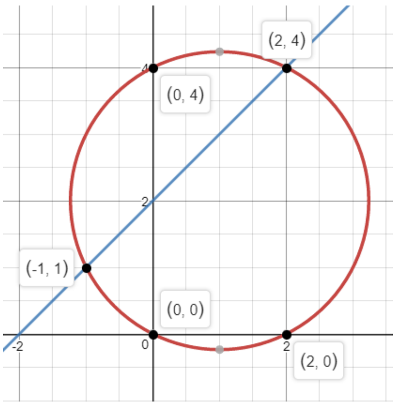
<u>פתרון א׳</u>:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

חיתוך עם ציר ה-x: $y = 0$	חיתוך עם ציר ה-y: $x = 0$
$(x-1)^2 + (0-2)^2 = 5$	$(0-1)^2 + (y-2)^2 = 5$
$x^2 - 2x + 1 + 4 = 5$	$1 + y^2 - 4y + 4 = 5$
$x^2 - 2x = 0$	$y^2 - 4y = 0$
$x(x-2) = 0$	$y(y-4) = 0$
$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$	$y_1 = 0 \qquad y_2 = 4$
$(0,0) \qquad (2,0)$	$(0,0) \qquad (0,4)$

<u>פתרון ב׳</u>: מציבים את משוואת הישר במשוואת המעגל

משוואת המעגל	$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$
נציב $y = x + 2$	$(x-1)^2 + (x+2-2)^2 = 5$
מכניסים איברים	$(x-1)^2 + (x)^2 = 5$
פותחים סוגריים	$x^2 - 2x + 1 + x^2 = 5$
מעבירים אגפים	$2x^2 - 2x - 4 = 0$
נוסחת שורשים	$x_1 = -1 \qquad x_2 = 2$
מציבים את שיעורי ה-x בישר הנתון	$y_1 = -1 + 2 \qquad y_2 = 2 + 2$
	$y_1 = 1 \qquad y_2 = 4$
פתרון:	$(-1,1) \qquad (2,4)$



דוגמה בשימוש בנוסחאות

נתונות הנקודות $B(5,6)$ $A(1,4)$

א. מצאי את השיפוע בין 2 הנקודות.
ב. מצאי את משוואת הישר העובר בין 2 הנקודות.
ג. מצאי את נקודה C הנמצאת בדיוק בין 2 הנקודות (אמצע הקטע AB)
ד. מצאי את אורך הקטע AC
ה. מצאי את שיפוע הישר המאונך לישר AB .
ו. מצאי את משוואת הישר המאונך לישר AB ועובר בנקודה C.
ז. מצאי את משוואת המעגל שהקטע AB הוא הקוטר שלו.

פתרון:

א. מציבים בנוסחת שיפוע

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6-4}{5-1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

ב. בשביל משוואת הישר אנחנו צריכים שיפוע ונקודה. נשתמש בשיפוע שמצאנו ובנקודה $A(1,4)$ ונציב במשוואת הישר.

$$y-y_A=m_{AB}\cdot(x-x_A)$$
$$y-4=0.5\cdot(x-1)$$
$$y-4=0.5x-0.5$$
$$y=0.5x+3.5$$

ג. הנקודה C היא אמצע הקטע AB לכן נשתמש בנוסחת אמצע הקטע.

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+5}{2}=3$$
$$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{4+6}{2}=5$$

קיבלנו את הנקודה C:

$$C(3,5)$$

ד. מציבים בנוסחת אורך קטע את הנקודות $A(1,4)$ ו-$C(3,5)$.

$$d_{AC}=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$$
$$=\sqrt{(3-1)^2+(5-4)^2}=\sqrt{5}$$

ה. מוצאים שיפוע מאונך לפי שיפוע הופכי נגדי $\left(-\frac{1}{\text{השיפוע}}\right)$

$$m_{AB}=\frac{1}{2}\qquad m_{\text{ישר מאונך}}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$$

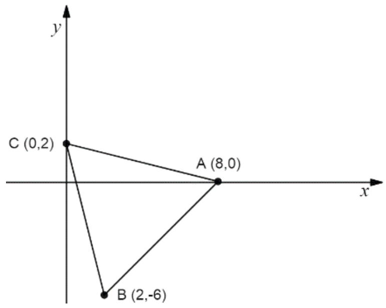
ו. בשביל משוואת הישר אנחנו צריכים שיפוע ונקודה. נשתמש בשיפוע שמצאנו בסעיף קודם ובנקודה $C(3,5)$ שעל הישר.

$$y-y_C=m_{\text{ישר מאונך}}\cdot(x-x_C)$$
$$y-5=-2\cdot(x-3)$$
$$y-5=-2x+6$$
$$y=-2x+11$$

ז. מציבים במשוואת מעגל את נקודת מרכז המעגל ואת הרדיוס המעגל. כיוון שהקטע AB הוא קוטר **נקודת האמצע** קטע שלו $\mathbf{C(3,5)}$ היא מרכז המעגל. **הרדיוס** הוא $\mathbf{R=AC=\sqrt{5}}$.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$
$$(x-3)^2+(y-5)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$(x-3)^2+(y-5)^2=5$$

דוגמאות להוכחות



1. נתונות הנקודות $A(8,0)$, $B(2,-6)$ ו-$C(0,2)$.

הוכח שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים.

בכדי להוכיח שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים **עלינו להראות** ש-2 מצלעות המשולש שוות.

נחשב את המרחק BC לפי נוסחת המרחק והנקודות $C(0,2)$ ו-$B(2,-6)$:

$$BC = \sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_B - x_C)^2} = \sqrt{(-6-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

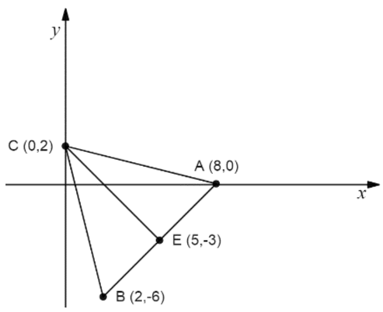
נחשב את המרחק AB לפי נוסחת המרחק והנקודות $A(8,0)$ ו-$B(2,-6)$:

$$AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = \sqrt{(-6-0)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$

נחשב את המרחק AC לפי נוסחת המרחק והנקודות $A(8,0)$ ו-$C(0,2)$:

$$AC = \sqrt{(y_C - y_A)^2 + (x_C - x_A)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

קיבלנו ש$AC = BC$ ולכן ΔABC הוא שווה שוקיים.



2. נתונות הנקודות $A(8,0)$, $B(2,-6)$, $C(0,2)$ ו-$E(5,-3)$.
הוכח שהישר CE אנך לישר AB.

בכדי להוכיח ש-$AB \perp CE$ **עלינו להראות** שמכפלת השיפועים של הישרים שווה ל--1.

נחשב את השיפוע של הישר CE לפי הנקודות $C(0,2)$ ו-$E(5,-3)$:

$$m_{CE} = \frac{y_C - y_E}{x_C - x_E} = \frac{2-(-3)}{0-5} = -1$$

נחשב את השיפוע של הישר AB לפי הנקודות $A(8,0)$ ו-$B(2,-6)$:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0-(-6)}{8-2} = 1$$

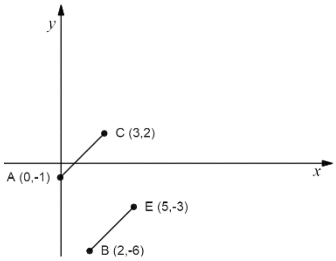
ניתן לראות כי השיפועים של הישרים נגדיים בסימנים והופכיים:

$$m_{AB} \cdot m_{CE} = 1 \cdot (-1) = -1$$

קיבלנו שמכפלת שיפועי הישרים היא -1 ולכן מדוברים בישרים אנכיים.

3. נתונות הנקודות $A(0,-1)$, $B(2,-6)$, $C(3,2)$ ו-$E(5,-3)$.

הוכח שהישרים EB ו-AC מקבילים.



בכדי להוכיח ש-$CE \parallel AB$ **עלינו להראות** שלישרים יש שיפוע זהה.

נחשב את השיפוע של הישר EB לפי הנקודות $B(2,-6)$ ו-$E(5,-3)$:

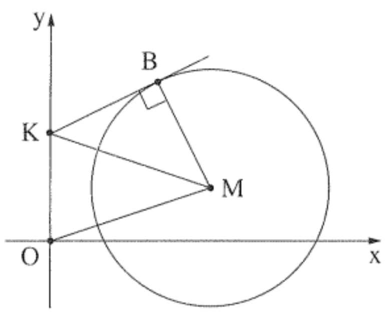
$$m_{EB} = \frac{y_B - y_E}{x_B - x_E} = \frac{-6-(-3)}{2-5} = 1$$

נחשב את השיפוע של הישר AC לפי הנקודות $A(0,-1)$ ו-$C(3,2)$:

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-1-2}{0-3} = 1$$

קיבלנו ששיפועי הישרים שווים ל-1 ולכן מדוברים בישרים מקבילים.

בגרות קיץ 2019 מועד א שאלה 3



בציור שלפניך מתואר מעגל שמרכזו M .

הנקודה B נמצאת על המעגל.

משוואת המשיק למעגל בנקודה B היא $y = \frac{1}{2}x + 4$.

שיעור ה־ x של הנקודה B הוא 4 .

א. (1) מצא את שיעור ה־ y של הנקודה B .

(2) מצא את שיפוע הישר BM .

(3) מצא את משוואת הישר BM .

משוואת הישר OM היא $y = \frac{1}{3}x$ (O — ראשית הצירים).

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודה M .

(2) מצא את משוואת המעגל.

המשיק למעגל בנקודה B חותך את ציר ה־y בנקודה K (ראה ציור).

ג. (1) מצא את שיעורי הנקודה K .

(2) חשב את שטח המשולש BMK .

סעיף א'(1):

הנקודה B נמצאת על המשיק למעגל שמשוואתו נתונה לנו. נציב במשוואת המשיק $x_B = 4$ ונקבל את שיעור ה-y של הנקודה B.

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

$$y_B = \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = 2 + 4 = 6$$

סעיף א'(2):

אנחנו יודעים שמשיק מעגל אנך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה, כלומר משיק $MB \perp$

כיוון שהמשיק אנך לרדיוס מכפלת השיפועים שלהם שווה ל-1-.

$$m_{MB} \cdot m_{\text{משיק}} = -1 \ \rightarrow m_{MB} = -\frac{1}{m_{\text{משיק}}}$$

נשתמש בשיפוע המשיק, אותו אנחנו יודעים ממשוואת המשיק ($m_{\text{משיק}} = \frac{1}{2}$)

$$m_{MB} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

סעיף א'(3):

בכדי למצוא את משוואת הישר MB אנחנו צריכים 2 נקודות או נקודה ושיפוע. נשתמש בשיפוע שמצאנו ובנקודה $B(4,6)$.

$$y - y_B = m_{MB} \cdot (x - x_B)$$

$$y - 6 = -2 \cdot (x - 4)$$

$$y = -2x + 8 + 6 = -2x + 14$$

סעיף ב'(1):

הנקודה M היא נקודת המפגש בין הישר MB לבין הישר OM.

לכן הנקודה מקיימת את שתי משוואות הישרים הללו:

$$y = -2x + 14$$

$$y = \frac{1}{3}x$$

נציב $y=\frac{1}{3}x$ במשוואת הישר MB :

$$\frac{1}{3}x=-2x+14\ \rightarrow 2\frac{1}{3}x=14$$
$$x_M=6$$

נציב $x_M=6$ במשוואת הישר OM, $y=\frac{1}{3}x$:

$$y_M=\frac{1}{3}\cdot 6=2$$
$$M(6,2)$$

<u>סעיף ב'(2) :</u>

בכדי למצוא את משוואת המעגל עלינו לדעת את נקודת מרכז המעגל ואת רדיוס המעגל.

נחשב את אורך רדיוס המעגל BM לפי הנקודות $B(4,6)$ ו-$M(6,2)$

$$BM=\sqrt{(y_B-y_M)^2+(x_B-x_M)^2}=\sqrt{(6-2)^2+(4-6)^2}=\sqrt{20}$$
$$R=\sqrt{20}$$

נציב במשוואת המעגל את הרדיוס שמצאנו
ואת נקודת מרכז המעגל $M(6,2)$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$
$$(x-6)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{20}\right)^2=20$$

<u>סעיף ג'(1) :</u>

הנקודה K היא נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-y, כלומר שיעור ה-x שלה הוא 0.

נציב $x=0$ במשוואת המשיק הנתונה לנו :

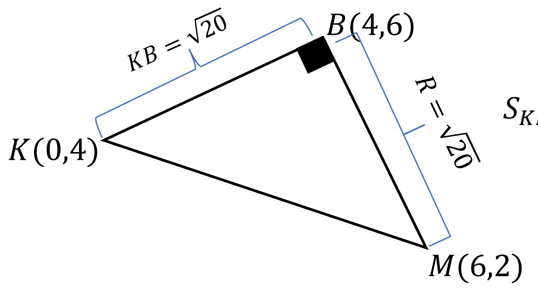
$$y_K=\frac{1}{2}\cdot 0+4=4\ \rightarrow K(0,4)$$

<u>סעיף ג'(2) :</u>

בכדי לחשב את שטח המשולש KBM תחילה נחשב את האורך KB לפי נוסחת המרחק :

$$KB=\sqrt{(y_B-y_K)^2+(x_B-x_K)^2}=\sqrt{(6-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{20}$$

כעת, נסתכל על ΔKBM :



$$S_{KBM}=\frac{BM\cdot KB}{2}=\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}}{2}=\frac{20}{2}$$

$S_{KBM}=10$ יח"ר